

Limites de fonctions & Asymptotes

Limites en un point ■ Limites en l'infini ■ Opérations ■ Croissances comparées

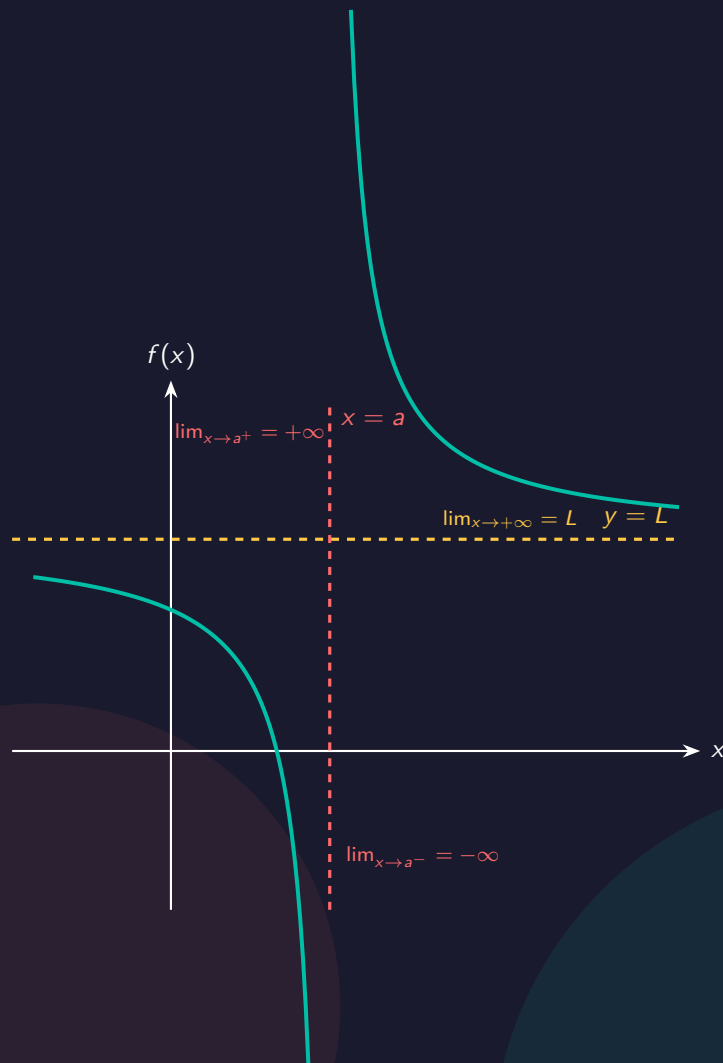









Table des matières

1	 Pourquoi étudier les limites de fonctions ?	3
1.1	Du discret au continu : le changement de paradigme	3
1.2	L'interprétation géométrique : la traque des asymptotes	3
1.3	L'outil fondamental du calcul différentiel	3
2	 L'idée avant la formule	4
2.1	Limite en l'infini : La stabilisation (Asymptote horizontale)	4
2.2	Limite en un point fini : Le mur infranchissable (Asymptote verticale)	4
3	 Le cours formel	5
3.1	Limites en l'infini ($x \rightarrow +\infty$ ou $x \rightarrow -\infty$)	5
3.2	Limites en un point réel a ($x \rightarrow a$)	5
3.3	Synthèse sur les Asymptotes (Inclus l'Asymptote Oblique)	6
3.4	Opérations sur les limites et Formes Indéterminées	7
3.5	Limite d'une fonction composée	8
3.6	Limites usuelles et Croissances comparées	8
3.7	Théorèmes de Comparaison et des Gendarmes	10
4	 La boîte à outils — Réflexes pour le bac	12
5	 Exercices	13
6	 Problème — Étude complète et Asymptotes ★★ ★	15
7	 Corrigés détaillés	16

1 ? Pourquoi étudier les limites de fonctions ?

1.1 Du discret au continu : le changement de paradigme

Dans la fiche précédente (Fiche 5), nous avons étudié les limites de **suites**. Une suite est définie sur les entiers naturels \mathbb{N} . Le seul voyage possible pour l'indice n d'une suite est de tendre vers $+\infty$ (car n ne peut que grandir : $0, 1, 2, 3 \dots$). C'est ce qu'on appelle un environnement **discret**.

Avec les **fonctions d'une variable réelle**, la variable x appartient à \mathbb{R} . Nous entrons dans le monde **continu**. Ce passage change tout et enrichit considérablement la notion de limite :

- x peut tendre vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.
- Surtout, x peut tendre vers un **nombre réel fini** a (par exemple, que se passe-t-il quand x s'approche de 0 ?).
- x peut s'approcher d'un nombre a par la gauche (valeurs inférieures) ou par la droite (valeurs supérieures), ce qui peut donner des résultats diamétralement opposés !

1.2 L'interprétation géométrique : la traque des asymptotes

L'une des finalités majeures de l'étude des limites de fonctions est d'en déduire des propriétés géométriques sur la courbe représentative. Les limites permettent de détecter les **asymptotes**, ces droites aimantées dont la courbe se rapproche indéfiniment sans jamais les croiser à l'infini.

Comprendre les limites, c'est être capable de tracer l'allure globale d'une fonction aux confins de son domaine de définition, là où le calcul point par point devient impossible.

1.3 L'outil fondamental du calcul différentiel

Sans limite, pas de dérivée ! Rappelle-toi la classe de Première : le nombre dérivé $f'(a)$ est défini exactement comme une limite, celle du taux d'accroissement lorsque h tend vers 0 :

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

L'analyse entière (continuité, dérivabilité, intégration) repose sur les fondations solides posées par la théorie des limites.

2 L'idée avant la formule

Avant d'aborder les définitions strictes avec les quantificateurs mathématiques, construisons des représentations visuelles fortes de ce qui se passe graphiquement.

2.1 Limite en l'infini : La stabilisation (Asymptote horizontale)

Intuition | L'avion en phase de croisière

Imagine que la fonction $f(x)$ décrit l'altitude d'un avion en fonction du temps x . L'avion décolle, subit quelques turbulences, puis finit par atteindre son altitude de croisière de 10 000 mètres et s'y stabilise. Mathématiquement, on dit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 10\,000$.

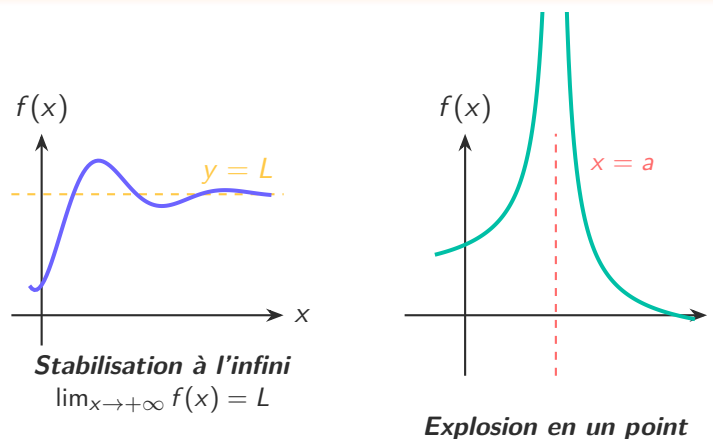
Peu importe la marge d'erreur ε que tu fixes (par exemple, rester entre 9 990 et 10 010 mètres), il arrivera un instant A à partir duquel l'avion ne quittera plus **jamais** ce couloir d'altitude. La droite d'équation $y = 10\,000$ est une **asymptote horizontale**.

2.2 Limite en un point fini : Le mur infranchissable (Asymptote verticale)

Intuition | Le trou noir de la division par zéro

Que se passe-t-il pour la fonction inverse $f(x) = \frac{1}{x}$ lorsque x s'approche dangereusement de 0 ? Si $x = 0,1$, alors $f(x) = 10$. Si $x = 0,001$, alors $f(x) = 1\,000$. Plus x est petit, plus la réponse explose.

Il y a un mur en $x = 0$. La courbe va s'élever le long de ce mur vers $+\infty$ (si on approche par des valeurs positives) ou plonger vers $-\infty$ (si on approche par des valeurs négatives). La droite d'équation $x = 0$ est une **asymptote verticale**. La courbe la fôle, mais ne la traverse jamais car la fonction n'y est pas définie.



3 Le cours formel

Cette section présente les définitions exigibles, écrites avec le langage des quantificateurs mathématiques. C'est la fondation de l'analyse moderne (développée notamment par Cauchy et Weierstrass).

3.1 Limites en l'infini ($x \rightarrow +\infty$ ou $x \rightarrow -\infty$)

Ces définitions sont les analogues directs de celles vues pour les suites, à la différence près que le seuil n'est plus un entier N , mais un nombre réel A .

Définition | Limite finie en l'infini (Asymptote Horizontale)

On dit que la fonction f a pour limite le réel L en $+\infty$ si, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un réel A tel que, dès que $x \geq A$, on a $f(x) \in]L - \varepsilon; L + \varepsilon[$.

Formellement :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists A \in \mathbb{R} \quad \text{tel que} \quad \forall x \geq A, \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

On note $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$.

Interprétation graphique : La droite d'équation $y = L$ est une **asymptote horizontale** à la courbe représentative de f en $+\infty$.

Exemple | Démonstration formelle d'une limite finie

Prouvons formellement que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Soit $\varepsilon > 0$ un réel arbitrairement petit. On cherche à partir de quel seuil A on a $\left| \frac{1}{x} - 0 \right| < \varepsilon$. Comme on s'intéresse à la limite en $+\infty$, on suppose $x > 0$. L'inéquation devient :

$$\frac{1}{x} < \varepsilon \iff x > \frac{1}{\varepsilon}$$

Il suffit donc de choisir le seuil $A = \frac{1}{\varepsilon}$. Ainsi, pour tout $x > A$, la distance entre $f(x)$ et 0 est strictement inférieure à ε . La définition formelle est vérifiée, la limite est bien 0.

Définition | Limite infinie en l'infini

On dit que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si, pour tout réel M (aussi grand soit-il), il existe un réel A tel que dès que $x \geq A$, on a $f(x) > M$.

Formellement :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \quad \exists A \in \mathbb{R} \quad \text{tel que} \quad \forall x \geq A, \quad f(x) > M$$

On note $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

3.2 Limites en un point réel a ($x \rightarrow a$)

C'est la grande nouveauté de ce chapitre. Que se passe-t-il quand x s'approche d'un réel a où la fonction présente une singularité (souvent une valeur interdite annulant un dénominateur) ?

Définition | Limite infinie en un point (Asymptote Verticale)

On dit que f a pour limite $+\infty$ en a si, pour tout réel M , il existe un réel $\alpha > 0$ tel que dès que la distance entre x et a est inférieure à α ($|x - a| < \alpha$), on a $f(x) > M$.

Formellement :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \quad \exists \alpha > 0 \quad \text{tel que} \quad \forall x \neq a, \quad |x - a| < \alpha \implies f(x) > M$$

Interprétation graphique : La droite d'équation $x = a$ est une **asymptote verticale** à la courbe de f .

⚠ Attention | Limites à gauche et à droite

Lorsqu'on s'approche d'un nombre a , on peut le faire de deux manières sur l'axe des réels :

- Par valeurs inférieures (**limite à gauche**) : On note $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ ou $\lim_{x < a \rightarrow} f(x)$.
- Par valeurs supérieures (**limite à droite**) : On note $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ ou $\lim_{x > a \rightarrow} f(x)$.

Ces deux limites **peuvent être très différentes**. Par exemple, pour $f(x) = \frac{1}{x}$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad (\text{car on divise 1 par un nombre positif très proche de 0})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad (\text{car on divise 1 par un nombre négatif très proche de 0})$$

💡 Exemple | Analyse complète d'une limite en un point et règle des signes

Soit la fonction $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$. Cherchons la limite de f quand x tend vers 3.

La valeur 3 est une valeur interdite. Évaluons mentalement le numérateur et le dénominateur :

- Numérateur : $2(3) + 1 = 7$.
- Dénominateur : $x - 3$ tend vers 0.

On obtient une forme du type « $\frac{7}{0}$ ». Ce n'est **pas** une forme indéterminée : un nombre fini divisé par un infiniment petit donne l'infini. Cependant, pour connaître le signe de cet infini, il faut connaître le **signe du zéro**. On sépare l'étude en deux cas :

1. Limite à droite ($x \rightarrow 3^+$) : Si $x > 3$, alors $x - 3 > 0$. Le dénominateur tend vers un « 0^+ ». Le numérateur tend vers 7 (positif). Par la règle des signes :

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x+1}{x-3} = +\infty$$

2. Limite à gauche ($x \rightarrow 3^-$) : Si $x < 3$, alors $x - 3 < 0$. Le dénominateur tend vers un « 0^- ». Par la règle des signes :

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x+1}{x-3} = -\infty$$

Conclusion géométrique : La droite d'équation $x = 3$ est une asymptote verticale à la courbe.

3.3 Synthèse sur les Asymptotes (Inclus l'Asymptote Oblique)

Voici le récapitulatif fondamental pour l'analyse de courbes au baccalauréat :

- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ (avec L réel fini), alors la droite d'équation $y = L$ est une **Asymptote Horizontale**.
- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ (a étant un réel fini), alors la droite d'équation $x = a$ est une **Asymptote Verticale**.

✓ Propriété | Approfondissement classique : Asymptote Oblique 🦋

Il arrive qu'en $+\infty$ ou $-\infty$, la courbe de f se rapproche d'une droite qui n'est ni horizontale ni verticale, mais **oblique**, d'équation $y = ax + b$.

Cela se produit si et seulement si l'écart entre la courbe et la droite tend vers 0 :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

Pour étudier la **position relative** de la courbe \mathcal{C}_f par rapport à l'asymptote Δ , on étudie le **signe de la différence** $d(x) = f(x) - (ax + b)$:

- Si $d(x) > 0$, alors $f(x) > ax + b$, la courbe est **au-dessus** de l'asymptote.
- Si $d(x) < 0$, alors $f(x) < ax + b$, la courbe est **en-dessous** de l'asymptote.

3.4 Opérations sur les limites et Formes Indéterminées

Les théorèmes de somme, produit et quotient vus sur les suites s'appliquent **exactement de la même manière** pour les fonctions.

Rappel des **4 Formes Indéterminées (FI)** qui bloquent le calcul direct :

1. « $+\infty - \infty$ » 2. « $0 \times \infty$ » 3. « $\frac{\infty}{\infty}$ » 4. « $\frac{0}{0}$ »

🔧 Méthode | Comment lever une F.I. pour une fonction

- **En $\pm\infty$ pour des polynômes ou des fractions** : On factorise par le **terme de plus haut degré** (car c'est lui qui dicte le comportement à l'infini).
- **En $\pm\infty$ avec des racines carrées** : Si la factorisation échoue, on multiplie le numérateur et le dénominateur par la **quantité conjuguée**.
- **En un point a pour une forme $\frac{0}{0}$** : Si on obtient 0 au numérateur et au dénominateur en remplaçant x par a , cela signifie que a est une racine des deux polynômes. On peut alors **factoriser par $(x - a)$** en haut et en bas, puis simplifier la fraction.

💡 Exemple | Lever la FI $\frac{0}{0}$ par factorisation

Calculons la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

En remplaçant x par 2, on obtient $\frac{2^2 - 4}{2 - 2} = \frac{0}{0}$. C'est une Forme Indéterminée.

Néanmoins, on reconnaît au numérateur une identité remarquable : $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$. Pour tout $x \neq 2$, la fraction peut se simplifier :

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 4}{x - 2} &= \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} \\ &= x + 2 \end{aligned}$$

Désormais, le calcul de la limite ne pose plus aucun problème :

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 2 + 2 = 4$$

L'indétermination est levée, la limite est 4.

3.5 Limite d'une fonction composée

★ Théorème | Théorème de composition des limites

La limite d'une fonction composée $f \circ g$ (c'est-à-dire de la forme $x \mapsto f(g(x))$) se détermine de manière séquentielle en posant un changement de variable $X = g(x)$.

Si :

$$— \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$$

$$— \lim_{X \rightarrow b} f(X) = L$$

Alors la limite composée est : $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = L$.

(Remarque : Les valeurs a, b, L peuvent être des nombres réels finis ou l'infini).

💡 Exemple | Rédaction type Bac pour la composition

Déterminons la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{4x-1}{x+3}}$$

La fonction globale est la composée de la fonction interne $g(x) = \frac{4x-1}{x+3}$ suivie de la fonction externe $f(X) = \sqrt{X}$.

Étape 1 : limite de la fonction intérieure. La fonction g est une fraction rationnelle. En $+\infty$, c'est une forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$. On factorise par x :

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{x \left(4 - \frac{1}{x}\right)}{x \left(1 + \frac{3}{x}\right)} \\ &= \frac{4 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{3}{x}} \quad (\text{pour } x \neq 0) \end{aligned}$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, le quotient tend vers $\frac{4}{1} = 4$. On a donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 4$.

Étape 2 : limite de la fonction extérieure. On pose le changement de variable $X = g(x)$. D'après l'étape précédente, quand $x \rightarrow +\infty$, on a $X \rightarrow 4$. On étudie la limite de la fonction racine en 4 :

$$\lim_{X \rightarrow 4} \sqrt{X} = \sqrt{4} = 2$$

Conclusion : D'après le théorème de composition des limites, on conclut que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{4x-1}{x+3}} = 2$$

3.6 Limites usuelles et Croissances comparées

✓ Propriété | Limites fondamentales de l'exponentielle et du logarithme

Ces limites sont à connaître par cœur :

$$— \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$— \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$— \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$$

$$\text{— } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$$

★ Théorème | Croissances comparées en l'infini

Ce théorème est l'arbitre absolu des conflits d'autorité (Formes Indéterminées) entre l'exponentielle, le logarithme et les puissances de x . La règle d'or est simple : **L'exponentielle l'emporte toujours sur les puissances de x , et les puissances de x l'emportent toujours sur le logarithme.**

Pour tout entier naturel $n \geq 1$:

1. **En $+\infty$ (Expo vs Polynôme) :** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$
(L'exponentielle tire vers $+\infty$ beaucoup plus fort que x^n ne tire vers 0 au dénominateur).
2. **En $-\infty$ (Expo vs Polynôme) :** $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$
(L'exponentielle tire vers 0 plus fort que x^n ne tire vers l'infini).
3. **En $+\infty$ (Logarithme vs Polynôme) :** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$
4. **En 0^+ (Logarithme vs Polynôme) :** $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln(x) = 0$

 *Démonstration* /  *Démonstration au programme* : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

Cette démonstration magistrale repose sur l'étude d'une fonction auxiliaire bien choisie.
Soit la fonction φ définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$\varphi(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$$

Calculons ses dérivées successives pour étudier ses variations :

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= e^x - x \\ \varphi''(x) &= e^x - 1\end{aligned}$$

Pour $x \geq 0$, la croissance de l'exponentielle garantit que $e^x \geq e^0$, c'est-à-dire $e^x \geq 1$. Par conséquent, $\varphi''(x) \geq 0$. La dérivée φ' est donc une fonction croissante sur $[0; +\infty[$. De plus, $\varphi'(0) = e^0 - 0 = 1 > 0$. La fonction φ' étant croissante et démarrant à 1, on en déduit que pour tout $x \geq 0$, $\varphi'(x) > 0$. La fonction φ est donc **strictement croissante** sur $[0; +\infty[$. Puisque $\varphi(0) = e^0 - 0 = 1 > 0$, on déduit par le même raisonnement que pour tout $x \geq 0$, $\varphi(x) > 0$.

Ainsi, pour $x \geq 0$, on a démontré l'inégalité :

$$\begin{aligned}e^x - \frac{x^2}{2} &> 0 \\ e^x &> \frac{x^2}{2}\end{aligned}$$

Divisons cette inégalité par x (en supposant $x > 0$ pour ne pas changer le sens) :

$$\frac{e^x}{x} > \frac{x}{2}$$

Or, on sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} = +\infty$. Par le **théorème de comparaison**, on conclut de manière absolue que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad \square$$

💡 Exemple | Résolution avec croissances comparées

Soit à calculer la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 3x^2}{x^3 + 1}$$

En remplaçant par $+\infty$, on obtient une F.I. de la forme $\frac{\infty}{\infty}$. La méthode consiste à factoriser le numérateur et le dénominateur par leur terme dominant respectif. En haut, d'après les croissances comparées, l'exponentielle domine x^2 . On factorise donc par e^x . En bas, le terme dominant est x^3 .

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{e^x \left(1 - \frac{3x^2}{e^x}\right)}{x^3 \left(1 + \frac{1}{x^3}\right)} \\ &= \frac{e^x}{x^3} \times \frac{1 - 3\frac{x^2}{e^x}}{1 + \frac{1}{x^3}} \end{aligned}$$

Analysons les limites de chaque bloc :

- Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$, donc son inverse tend vers 0 : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$. La grande parenthèse du numérateur tend vers $1 - 3(0) = 1$.
- Le dénominateur $\left(1 + \frac{1}{x^3}\right)$ tend vers $1 + 0 = 1$.
- Le facteur de tête est $\frac{e^x}{x^3}$. Toujours par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3} = +\infty$.

Par la règle du produit des limites :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

3.7 Théorèmes de Comparaison et des Gendarmes

Ils fonctionnent pour les fonctions exactement comme pour les suites. Ils constituent l'arme ultime contre les fonctions circulaires (\sin , \cos) qui n'ont pas de limite propre en l'infini.

★ Théorème | Théorème des gendarmes pour les fonctions

Soient f, g, h trois fonctions définies au voisinage de $+\infty$ et $L \in \mathbb{R}$. Si pour x assez grand, on a l'encadrement :

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

et si $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = L$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = L$, alors le théorème affirme que la fonction f converge vers la même limite :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$

💡 Exemple | Gendarmes avec exponentielle et cosinus

Déterminons la limite de $f(x) = e^{-x} \cos(x)$ en $+\infty$.

On sait que pour tout réel x , la fonction cosinus est bornée :

$$-1 \leq \cos(x) \leq 1$$

Comme la fonction exponentielle est **toujours strictement positive**, on peut multiplier toutes les inégalités par e^{-x} sans jamais changer l'ordre :

$$-e^{-x} \leq e^{-x} \cos(x) \leq e^{-x}$$

Calculons la limite des bornes :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} &= \lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0 \quad (\text{en posant } X = -x) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (-e^{-x}) &= 0 \end{aligned}$$

Le gendarme de gauche et le gendarme de droite tendent tous deux vers 0. D'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \cos(x) = 0$$

4 La boîte à outils — Réflexes pour le bac

Méthode | Arbre de décision pour un calcul de limite

Face à un calcul de limite le jour de l'épreuve, voici la marche à suivre implacable :

1. **On remplace x mentalement.** Si le résultat n'est pas une forme indéterminée, l'exercice est terminé ! N'invente pas des problèmes là où il n'y en a pas (par exemple $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^x$ n'est pas une FI, c'est $+\infty \times +\infty = +\infty$).
2. **C'est une F.I. avec des polynômes ou fractions en $\pm\infty$?**
 \Rightarrow On factorise de force par les termes de plus haut degré au numérateur et au dénominateur.
3. **C'est une F.I. contenant l'exponentielle ou le logarithme ?**
 \Rightarrow On factorise par le terme dominant pour faire apparaître exactement l'une des formules de croissances comparées du cours (comme $\frac{e^x}{x}$ ou $\frac{\ln(x)}{x}$).
4. **C'est une F.I. du type $+\infty - \infty$ contenant des racines carrées ?**
 \Rightarrow On multiplie le numérateur et le dénominateur par la **quantité conjuguée** pour éliminer les racines au numérateur via l'identité $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$.
5. **La fonction contient un $\cos(x)$ ou un $\sin(x)$ et on cherche la limite en l'infini ?**
 \Rightarrow Impossible de calculer directement. On encadre systématiquement entre -1 et 1 , et on appelle les gendarmes !

Attention | Top 4 des erreurs fatales

1. **Appliquer la règle du plus haut degré en un nombre fini.** La règle consistant à ne garder que le terme de plus haut degré ne fonctionne **QU'EN** $+\infty$ ou $-\infty$. En $x \rightarrow 0$, c'est au contraire le degré le plus faible qui impose son comportement !
2. **Mal rédiger la composition des limites.** Ne jamais écrire $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\dots} = \dots$ d'un seul coup. Le correcteur veut obligatoirement voir la décomposition en deux étapes avec le changement de variable : $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$ ET $\lim_{X \rightarrow b} f(X) = L$.
3. **Oublier de vérifier le signe d'un zéro au dénominateur.** Un 0 au dénominateur est explosif et mène à l'infini. Il faut impérativement faire un petit tableau de signe sur le côté pour déterminer si on a affaire à un 0^+ ou un 0^- . Sans cela, la règle des signes est inapplicable et le résultat final sera faux.
4. **Inventer des Croissances Comparées fausses.** Le théorème affirme que l'exponentielle l'emporte **en** $+\infty$. À l'inverse, l'expression $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x}$ n'est **ABSOLUMENT PAS** une F.I. qui relève de ce théorème, cela donne trivialement $\frac{0}{-\infty} = 0$.

5 Exercices

Exercice 1 — Limites de base par opérations

Déterminer les limites suivantes (bien vérifier si l'on est en présence d'une forme indéterminée ou non) :

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3x^2 - 5x + \frac{1}{x} \right)$
- b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2 - x)(e^x + 4)$
- c) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3}{x^2} + 5x - \sqrt{x} \right)$ (avec $x > 0$)

Exercice 2 — Asymptotes verticales (Signe du zéro)

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{-2x+5}{x-4}$.

- a) Déterminer la limite de f quand $x \rightarrow 4^-$ (limite par valeurs inférieures).
- b) Déterminer la limite de f quand $x \rightarrow 4^+$ (limite par valeurs supérieures).
- c) En déduire l'existence d'une asymptote et préciser son équation cartésienne.

Exercice 3 — Lever les F.I. sur les fractions rationnelles

Déterminer les limites suivantes en factorisant par les termes de plus haut degré :

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3 - 2x + 1}{5x^3 + 7x^2}$
- b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{x^3 - x}$
- c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - 1}{3x^2 + x}$

Exercice 4 — La méthode de la quantité conjuguée

Soit la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x} - x$.

- a) Montrer que le calcul direct de la limite en $+\infty$ mène à une forme indéterminée.
- b) En multipliant par la quantité conjuguée, réécrire $f(x)$ sous la forme d'un quotient.
- c) En factorisant le numérateur et le dénominateur par x , déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Exercice 5 — Rédaction de la composition de limites

Rédiger soigneusement le calcul des limites composées suivantes, en précisant les changements de variables :

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{2x+1}{x-3}}$
- b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 4x + 1}$

Exercice 6 — Théorème des Gendarmes et fonctions oscillantes

Soit la fonction g définie par $g(x) = \frac{x^2 + x \sin(x)}{x^2 + 1}$.

- a) Démontrer que pour tout réel $x > 0$, on a l'encadrement suivant :

$$\frac{x^2 - x}{x^2 + 1} \leq g(x) \leq \frac{x^2 + x}{x^2 + 1}$$

- b) En déduire la limite de $g(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 7 ★★☆☆ — Croissances comparées (L'exponentielle patronne)

Déterminer les limites suivantes en $+\infty$ en forçant l'apparition des formules du cours :

- a) $f(x) = \frac{e^x}{x^2+5x}$
- b) $g(x) = x^3 - e^x$
- c) $h(x) = \frac{e^x+x}{e^x-x}$

Exercice 8 ★★☆☆ — Croissances comparées en $-\infty$

- a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 1)e^x$. (*Indication : penser à développer l'expression d'abord*).
- b) On souhaite calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{-x}$. En posant $X = -x$, déduire le résultat de cette limite. L'utilisation du théorème des croissances comparées était-elle véritablement nécessaire ici ?

Exercice 9 ★★☆☆ — F.I. du type $\frac{0}{0}$ par factorisation

Déterminer les limites locales suivantes :

- a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x-3}$
- b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+2x-3}{x-1}$

Exercice 10 ★★★★★ — Vrai ou Faux

Pour chacune des affirmations suivantes, justifier si elle est vraie (par une preuve) ou fausse (par un contre-exemple) :

- a) « Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, alors pour x suffisamment grand, $f(x)$ est strictement positif. »
- b) « Si pour tout $x \geq 0$, on a l'inégalité $f(x) > x$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. »
- c) « La courbe représentative d'une fonction ne peut jamais croiser son asymptote horizontale. »

Exercice 11 ★★★★★ — Asymptote Oblique et Position Relative

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $] -1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2x^2+x}{x+1}$.

- a) Trouver trois réels a , b et c tels que pour tout $x > -1$, la fonction s'écrive :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$$

- b) En déduire que la droite (Δ) d'équation $y = 2x - 1$ est une asymptote oblique à la courbe en $+\infty$.
- c) Étudier la position relative de la courbe de f par rapport à son asymptote (Δ) .

Exercice 12 ★★★★★ — Modélisation d'un phénomène physique

La température (exprimée en $^{\circ}\text{C}$) d'un objet métallique se refroidissant dans une pièce maintenue à 20°C est modélisée par la fonction $T(t) = 20 + 60e^{-0,1t}$, où $t \geq 0$ est le temps écoulé en minutes depuis la sortie du four.

- a) Déterminer la température initiale de l'objet métallique.
- b) Déterminer la limite de $T(t)$ quand $t \rightarrow +\infty$. Interpréter physiquement ce résultat.

6 🐼 Problème — Étude complète et Asymptotes ★★ ★

🔥 Problème style prépa — Analyse et Suite récurrente

Ce grand problème synthétise l'ensemble du chapitre : étude d'une fonction rationnelle complexe, découverte d'une asymptote oblique, étude de position relative, puis création d'un pont avec le chapitre des suites en étudiant une suite définie par la récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I =]1; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 + 4}{x^2 - 1}$$

On note \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

Partie A — Étude des limites et découverte des asymptotes

1. Déterminer rigoureusement la limite de f en $x \rightarrow 1^+$. Quelle conséquence graphique majeure peut-on en tirer pour la courbe \mathcal{C}_f ?
2. Montrer que la limite de la fonction f en $+\infty$ est $+\infty$.
3. Démontrer que, pour tout réel $x \in I$, on peut réécrire la fonction sous la forme décomposée :

$$f(x) = x - 1 + \frac{x + 3}{x^2 - 1}$$

4. Démontrer grâce à l'expression précédente que la droite (Δ) d'équation $y = x - 1$ est une asymptote oblique à \mathcal{C}_f en $+\infty$.
5. Étudier le signe de la différence $f(x) - (x - 1)$ sur l'intervalle I et en déduire la position relative de la courbe \mathcal{C}_f par rapport à son asymptote (Δ) .

Partie B — Étude des variations de la fonction

6. Montrer que la dérivée de f sur l'intervalle I peut s'écrire sous la forme factorisée :

$$f'(x) = \frac{x \cdot g(x)}{(x^2 - 1)^2}$$

où $g(x)$ est un polynôme de degré 3 que l'on déterminera.

7. On admet pour la suite du problème que pour tout $x > 1$, la fonction polynomiale vérifie $g(x) > 0$. Dresser le tableau de variations complet de f sur l'intervalle $]1; +\infty[$, en y incluant les limites calculées dans la Partie A.

Partie C — Lien avec une suite récurrente

On définit la suite (u_n) par son premier terme $u_0 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

8. Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]1; +\infty[$. Déterminer la valeur exacte de α .
9. En utilisant le résultat de la question A.5, démontrer par un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n , on a $u_n \geq \alpha$ et que la suite (u_n) est strictement décroissante.
10. La suite (u_n) est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa limite ?

7 Corrigés détaillés

Corrigé — Exercice 1

- a) Nous sommes en présence d'une somme où $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-5x) = -\infty$. C'est une forme indéterminée. Factorisons par le terme de plus haut degré, x^2 :

$$3x^2 - 5x + \frac{1}{x} = x^2 \left(3 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^3} \right)$$

On analyse les limites de chaque élément :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} = 0$, donc la parenthèse tend vers 3.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$.

Par le théorème du produit des limites, on obtient :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3x^2 - 5x + \frac{1}{x} \right) = +\infty$$

- b) Analysons les deux facteurs séparément en $-\infty$:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2 - x) = +\infty$.
- On sait que $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + 4) = 4$.

Par la règle du produit, une limite infinie multipliée par un réel strictement positif donne l'infini avec le même signe. Ainsi :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2 - x)(e^x + 4) = +\infty$$

- c) Quand $x \rightarrow 0$ avec $x > 0$, on calcule les limites de chaque terme :

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0^+$, donc par passage à l'inverse $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3}{x^2} = +\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} 5x = 0$.
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$.

Par la règle de la somme des limites (il n'y a aucune forme indéterminée ici), la limite globale est imposée par le terme tendant vers l'infini :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{3}{x^2} + 5x - \sqrt{x} \right) = +\infty$$

Corrigé — Exercice 2

- a) Étudions séparément le numérateur et le dénominateur lorsque x s'approche de la valeur interdite 4. Pour le numérateur : $\lim_{x \rightarrow 4} (-2x + 5) = -2(4) + 5 = -3$. Pour le dénominateur : $\lim_{x \rightarrow 4} (x - 4) = 0$. Nous avons une limite de la forme $\frac{-3}{0}$. Le résultat sera infini, mais il faut déterminer le signe du zéro.

Puisque l'on étudie la limite à gauche ($x \rightarrow 4^-$), on a $x < 4$. Ceci implique que $x - 4 < 0$. Le dénominateur tend donc vers 0^- . Le quotient prend la forme $\frac{-3}{0^-}$. Par la règle des signes (négatif divisé par négatif donne positif), on conclut :

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = +\infty$$

- b) On reproduit le même raisonnement pour la limite à droite ($x \rightarrow 4^+$). Ici, $x > 4$, ce qui implique que $x - 4 > 0$. Le dénominateur tend vers 0^+ . Le quotient prend la forme $\frac{-3}{0^+}$. Par la règle des signes (négatif divisé par positif donne négatif), on conclut :

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = -\infty$$

- c) Les limites calculées en $x = 4$ étant infinies, on en déduit géométriquement que la courbe représentative admet une **asymptote verticale** dont l'équation est la droite verticale d'abscisse **$x = 4$** .

Corrigé — Exercice 3

- a) Le numérateur et le dénominateur tendent vers $+\infty$. Nous avons une forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$. On factorise rigoureusement par le terme de plus haut degré, x^3 , en haut et en bas :

$$\begin{aligned}\frac{4x^3 - 2x + 1}{5x^3 + 7x^2} &= \frac{x^3 \left(4 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)}{x^3 \left(5 + \frac{7}{x}\right)} \\ &= \frac{x^3 \left(4 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)}{x^3 \left(5 + \frac{7}{x}\right)}\end{aligned}$$

Pour $x \neq 0$, on simplifie par x^3 :

$$= \frac{4 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{5 + \frac{7}{x}}$$

Toutes les fractions du type $\frac{1}{x^n}$ tendent vers 0 en $+\infty$. Le numérateur tend donc vers 4, et le dénominateur vers 5. Le résultat final est : $\frac{4}{5}$.

- b) De même, on a une forme $\frac{\infty}{\infty}$. On factorise par x^2 au numérateur et par x^3 au dénominateur :

$$\begin{aligned}\frac{x^2 + 1}{x^3 - x} &= \frac{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{x^3 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)} \\ &= \frac{x^2}{x^3} \times \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}} \\ &= \frac{1}{x} \times \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}}\end{aligned}$$

Le deuxième facteur de ce produit tend vers $\frac{1+0}{1-0} = 1$. Le premier facteur $\frac{1}{x}$ tend vers 0 en $-\infty$. Le produit 0×1 donne la limite : 0.

- c) On factorise par x^4 en haut et x^2 en bas :

$$\begin{aligned}\frac{x^4 - 1}{3x^2 + x} &= \frac{x^4 \left(1 - \frac{1}{x^4}\right)}{x^2 \left(3 + \frac{1}{x}\right)} \\ &= x^2 \times \frac{1 - \frac{1}{x^4}}{3 + \frac{1}{x}}\end{aligned}$$

La grande fraction tend vers $\frac{1-0}{3+0} = \frac{1}{3}$. Le facteur x^2 tend vers $+\infty$. Le produit d'une limite infinie par un réel strictement positif donne l'infini. La limite est donc : $+\infty$.

Corrigé — Exercice 4

- a) En $+\infty$, le polynôme sous la racine $x^2 + 3x$ tend vers $+\infty$, donc la racine carrée tend vers $+\infty$. Le second terme $-x$ tend vers $-\infty$. La somme donne immédiatement une forme indéterminée classique du type « $+\infty - \infty$ ».
- b) La méthode pour ce cas spécifique est l'utilisation de la quantité conjuguée. On multiplie et divise par l'expression conjuguée ($\sqrt{x^2 + 3x} + x$) :

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x^2 + 3x} - x)(\sqrt{x^2 + 3x} + x)}{\sqrt{x^2 + 3x} + x}$$

On applique l'identité remarquable $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ au numérateur :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(\sqrt{x^2 + 3x})^2 - x^2}{\sqrt{x^2 + 3x} + x} \\ &= \frac{x^2 + 3x - x^2}{\sqrt{x^2 + 3x} + x} \\ &= \frac{3x}{\sqrt{x^2 + 3x} + x} \end{aligned}$$

La fonction est bien réécrite sous la forme d'un quotient.

- c) On se retrouve maintenant avec une nouvelle forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$. Il faut factoriser par x . Commençons par le terme sous la racine :

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + 3x} &= \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{3}{x}\right)} \\ &= \sqrt{x^2} \times \sqrt{1 + \frac{3}{x}} \end{aligned}$$

Puisque l'on cherche la limite en $+\infty$, on peut supposer que $x > 0$. Ainsi, $\sqrt{x^2} = |x| = x$. L'expression du dénominateur devient :

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + 3x} + x &= x\sqrt{1 + \frac{3}{x}} + x \\ &= x \left(\sqrt{1 + \frac{3}{x}} + 1 \right) \end{aligned}$$

Remplaçons cela dans l'expression complète de $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{3x}{x \left(\sqrt{1 + \frac{3}{x}} + 1 \right)} \\ &= \frac{3}{\sqrt{1 + \frac{3}{x}} + 1} \end{aligned}$$

Quand x tend vers $+\infty$, la fraction $\frac{3}{x}$ tend vers 0. Le dénominateur tend donc vers $\sqrt{1 + 0} + 1 = 1 + 1 = 2$. La limite cherchée est donc $\frac{3}{2}$.

Corrigé — Exercice 5

- a) Décomposons soigneusement la limite de cette fonction composée. Posons la fonction intérieure $g(x) = \frac{2x+1}{x-3}$.

Étape 1 : Déterminons la limite de g en $+\infty$. C'est une fraction rationnelle, on factorise par les termes dominants :

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{x \left(2 + \frac{1}{x}\right)}{x \left(1 - \frac{3}{x}\right)} \\ &= \frac{2 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{3}{x}} \end{aligned}$$

On en déduit facilement que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \frac{2+0}{1-0} = 2$.

Étape 2 : Déterminons la limite de la fonction extérieure. On pose le changement de variable $X = g(x)$. D'après l'étape précédente, X tend vers 2. On calcule la limite de l'exponentielle en ce point :

$$\lim_{X \rightarrow 2} e^X = e^2$$

Conclusion : Par le théorème de composition des limites, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{2x+1}{x-3}} = e^2$.

b) Répétons la procédure. Fonction intérieure : $h(x) = x^2 - 4x + 1$.

Étape 1 : Limite en $-\infty$. On factorise le polynôme par son terme dominant :

$$h(x) = x^2 \left(1 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} \right)$$

Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$ et la parenthèse tend vers 1, on a par produit $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = +\infty$.

Étape 2 : Limite extérieure. On pose $X = h(x)$. On cherche la limite de la racine carrée quand X tend vers $+\infty$:

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} \sqrt{X} = +\infty$$

Conclusion : Par composition, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 4x + 1} = +\infty$.

Corrigé — Exercice 6

a) La présence de la fonction sinus nous oblige à recourir aux inégalités. On sait que pour tout réel x , on a l'encadrement fondamental :

$$-1 \leq \sin(x) \leq 1$$

L'énoncé nous permet de supposer que $x > 0$. On peut donc multiplier toute l'inégalité par x sans altérer le sens :

$$-x \leq x \sin(x) \leq x$$

On ajoute ensuite x^2 à chaque membre :

$$x^2 - x \leq x^2 + x \sin(x) \leq x^2 + x$$

Le dénominateur de $g(x)$ est $x^2 + 1$. Cette quantité est strictement positive pour tout x réel. On peut donc diviser toute la chaîne d'inégalités par ce terme :

$$\frac{x^2 - x}{x^2 + 1} \leq \frac{x^2 + x \sin(x)}{x^2 + 1} \leq \frac{x^2 + x}{x^2 + 1}$$

L'encadrement est démontré.

b) Étudions séparément les limites des deux « gendarmes » (les bornes) en $+\infty$.

Borne inférieure :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x}{x^2 + 1} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(1 - \frac{1}{x} \right)}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} = 1 \end{aligned}$$

Borne supérieure :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x}{x^2 + 1} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} = 1 \end{aligned}$$

« L'analyse commence là où le calcul s'arrête. »

Les deux fonctions encadrantes convergent vers la même limite finie 1. D'après le **théorème des gendarmes**, la fonction centrale est forcée de converger vers cette même valeur. Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$.

Corrigé — Exercice 7

- a) $f(x) = \frac{e^x}{x^2 + 5x}$. Remplacer par l'infini donne une F.I. de type $\frac{\infty}{\infty}$. L'objectif est de forcer l'apparition de l'expression du cours $\frac{e^x}{x^n}$. Le dénominateur se factorise par son terme dominant x^2 :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{e^x}{x^2 \left(1 + \frac{5}{x}\right)} \\ &= \frac{e^x}{x^2} \times \frac{1}{1 + \frac{5}{x}} \end{aligned}$$

D'après le théorème des croissances comparées, l'exponentielle l'emporte sur les polynômes : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$. La seconde fraction tend vers $\frac{1}{1+0} = 1$. Par la règle du produit des limites, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

- b) $g(x) = x^3 - e^x$. C'est une F.I. classique du type $+\infty - \infty$. La règle exige de factoriser par l'autorité absolue en l'infini : l'exponentielle.

$$g(x) = e^x \left(\frac{x^3}{e^x} - 1 \right)$$

Par croissances comparées, l'exponentielle domine x^3 , ce qui justifie que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{e^x} = 0$. En passant à l'inverse, on obtient que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{e^x} = 0$. La parenthèse tend donc vers $0 - 1 = -1$. Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, le produit de ces deux limites donne : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$.

- c) $h(x) = \frac{e^x + x}{e^x - x}$. C'est une nouvelle F.I. $\frac{\infty}{\infty}$. On factorise par le terme dominant e^x au numérateur et au dénominateur :

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{e^x \left(1 + \frac{x}{e^x}\right)}{e^x \left(1 - \frac{x}{e^x}\right)} \\ &= \frac{1 + \frac{x}{e^x}}{1 - \frac{x}{e^x}} \end{aligned}$$

Le théorème des croissances comparées donne $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$. Le numérateur tend vers $1+0 = 1$, et le dénominateur vers $1-0 = 1$. Par quotient, $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 1$.

Corrigé — Exercice 8

- a) En $-\infty$, le polynôme $(x^2 - 1)$ tend vers $+\infty$ et l'exponentielle e^x tend vers 0. C'est une F.I. $\infty \times 0$. L'astuce standard est de développer l'expression pour exploiter la forme du cours :

$$(x^2 - 1)e^x = x^2 e^x - e^x$$

Le cours sur les croissances comparées en $-\infty$ nous dit que pour tout n , $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$. On applique ceci pour $n = 2$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x = 0$. De plus, la limite fondamentale de l'exponentielle est $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$. Par une simple différence ($0 - 0$), on obtient $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 1)e^x = 0$.

- b) Analysons ce qui se passe quand on cherche $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{-x}$. Quand $x \rightarrow -\infty$, le premier facteur x tend logiquement vers $-\infty$. Pour le second facteur e^{-x} , l'exposant $(-x)$ va tendre vers $+\infty$. Donc e^{-x} tend vers $+\infty$. Le produit est de la forme $(-\infty) \times (+\infty)$. Ceci n'est **absolument pas** une forme indéterminée ! La règle des signes s'applique sans encombre. L'utilisation d'un changement de variable ou des croissances comparées est donc inutile et relève du mauvais réflexe. Conclusion directe : $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{-x} = -\infty$.

Corrigé — Exercice 9

- a) En substituant x par 3, on aboutit à la forme indéterminée du type $\frac{0}{0}$. On lève cette indétermination en factorisant le numérateur à l'aide de l'identité remarquable fondamentale $a^2 - b^2$:

$$x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$$

Pour tout $x \neq 3$ (ce qui est le cas dans un passage à la limite), la fraction se réduit :

$$\frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3} = x + 3$$

La limite de ce polynôme simplifié est un jeu d'enfant :

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x + 3) = 3 + 3 = \mathbf{6}$$

- b) Encore une fois, la substitution directe $x = 1$ donne $\frac{1+2-3}{1-1} = \frac{0}{0}$, une F.I. Le numérateur $P(x) = x^2 + 2x - 3$ s'annule en 1, cela certifie que 1 est une racine, et donc que $P(x)$ peut être factorisé par $(x - 1)$. Cherchons le facteur manquant $(x - 1)(x + c) = x^2 + 2x - 3$. En développant et en identifiant le terme constant : $-1 \times c = -3 \implies c = 3$. La factorisation est donc $(x - 1)(x + 3)$. On simplifie la fraction originelle :

$$\frac{(x - 1)(x + 3)}{x - 1} = x + 3 \quad \text{pour } x \neq 1$$

Le passage à la limite donne immédiatement :

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x + 3) = 1 + 3 = \mathbf{4}$$

Corrigé — Exercice 10

- a) **Faux.** La limite décrit un point d'arrivée mathématique, elle n'indique en aucun cas par quel côté ce point est approché (par dessus ou par dessous). Preuve par contre-exemple : Considérons la fonction $f(x) = -\frac{1}{x}$. Sa limite est $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Pourtant, pour tout $x > 0$, on a évidemment $-\frac{1}{x} < 0$. La fonction est donc strictement négative malgré une limite nulle.
- b) **Vrai.** Cette affirmation est une traduction directe du théorème de comparaison pour les limites infinies. Démonstration : La fonction minorante $g(x) = x$ possède une limite évidente : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$. Comme $f(x)$ est strictement supérieur à un gendarme qui file vers l'infini, $f(x)$ est poussé vers l'infini. D'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
- c) **Faux.** C'est une idée reçue très répandue chez les élèves. Une asymptote représente un comportement limite global à l'infini, mais n'interdit nullement des intersections locales. Même pire, une courbe peut croiser son asymptote une infinité de fois ! Contre-exemple : La fonction oscillante amortie $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$. D'après le théorème des gendarmes, son asymptote horizontale est la droite $y = 0$. Or l'équation $\frac{\sin(x)}{x} = 0$ admet une infinité de solutions (tous les multiples de π). La courbe passe donc son temps à traverser son asymptote tout en s'écrasant dessus.

Corrigé — Exercice 11

- a) Pour déterminer ces coefficients, on réduit l'expression paramétrique au même dénominateur pour pouvoir l'identifier avec l'expression initiale :

$$\begin{aligned} ax + b + \frac{c}{x + 1} &= \frac{(ax + b)(x + 1) + c}{x + 1} \\ &= \frac{ax^2 + ax + bx + b + c}{x + 1} \\ &= \frac{ax^2 + (a + b)x + (b + c)}{x + 1} \end{aligned}$$

On procède maintenant à l'identification des coefficients du numérateur avec ceux de la fonction originale $2x^2 + x$:

— Terme en x^2 : $a = 2$

— Terme en x : $a + b = 1 \implies 2 + b = 1 \implies b = -1$

— Terme constant : $b + c = 0 \implies -1 + c = 0 \implies c = 1$

La décomposition est donc formellement démontrée :

$$f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{x+1}$$

- b) Pour prouver l'existence d'une asymptote oblique, on étudie la différence entre la fonction et l'équation de la droite suspectée. Posons $d(x) = f(x) - (2x - 1)$. D'après la question 1, cette différence s'effondre à :

$$d(x) = \frac{1}{x+1}$$

La limite de cet écart en $+\infty$ est triviale :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} d(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} = 0$$

Par définition du cours, la droite (Δ) d'équation $y = 2x - 1$ est par conséquent une **asymptote oblique** à la courbe en $+\infty$.

- c) Étudier la position relative exige d'étudier le signe de l'écart $d(x) = \frac{1}{x+1}$. L'énoncé nous place sur le domaine d'étude $] -1; +\infty[$. Sur cet intervalle, on a $x > -1$, ce qui implique que $x + 1 > 0$. Le numérateur étant strictement positif ($1 > 0$) et le dénominateur étant strictement positif, le quotient est positif : $d(x) > 0$. Conclusion de l'analyse : l'écart $f(x) - y_\Delta$ étant toujours positif, la courbe \mathcal{C}_f est **strictement située au-dessus** de son asymptote (Δ) sur l'intégralité du domaine.

Corrigé — Exercice 12

- a) L'instant initial d'un processus correspond au temps $t = 0$. Calculons l'image de 0 :

$$\begin{aligned} T(0) &= 20 + 60e^{-0,1 \times 0} \\ &= 20 + 60e^0 \\ &= 20 + 60 \times 1 \\ &= 80^\circ \text{C} \end{aligned}$$

L'objet métallique sort du four à la température de 80°C .

- b) On cherche $\lim_{t \rightarrow +\infty} T(t)$. C'est une limite composée.

— L'argument de l'exponentielle est $-0,1t$. Sa limite en $+\infty$ est $\lim_{t \rightarrow +\infty} (-0,1t) = -\infty$.

— Par composition avec la limite usuelle de l'exponentielle en l'infini négatif, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, on obtient :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,1t} = 0$$

Par produit et somme basiques, la limite de la fonction globale est :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} T(t) &= 20 + 60 \times 0 \\ &= 20 \end{aligned}$$

Interprétation physique du modèle : À long terme (asymptotiquement), l'objet se refroidit lentement jusqu'à atteindre l'équilibre thermique parfait avec son environnement. Sa température finit par égaler celle de la pièce ambiante, soit 20°C . La droite horizontale $y = 20$ est asymptote à la courbe de refroidissement.

Corrigé — Problème (Analyse et Suite Récurrente)

Partie A — Étude des limites

1. On cherche la limite locale de $f(x) = \frac{x^3 - x^2 + 4}{x^2 - 1}$ en 1^+ . Évaluons numérateur et dénominateur :

— Limite du numérateur : $1^3 - 1^2 + 4 = 4$.

— Limite du dénominateur : $1^2 - 1 = 0$. Il faut préciser le signe. Comme l'approche se fait par valeurs supérieures ($x \rightarrow 1^+ \Rightarrow x > 1$), alors $x^2 > 1$, et par suite $x^2 - 1 > 0$. Le dénominateur est donc un « 0^+ ».

Par la règle du quotient d'un réel strictement positif par un zéro positif, on obtient de façon certaine :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$$

Conséquence graphique : Cette limite infinie en un point fini démontre que la droite verticale d'équation $x = 1$ est une **asymptote verticale** à la courbe \mathcal{C}_f .

2. En $+\infty$, nous faisons face à une F.I. rationnelle du type $\frac{\infty}{\infty}$. On factorise le numérateur et le dénominateur par la puissance dominante de x :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^3 \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{4}{x^3}\right)}{x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)} \\ &= x \times \frac{1 - \frac{1}{x} + \frac{4}{x^3}}{1 - \frac{1}{x^2}} \end{aligned}$$

La géante fraction de droite est composée de termes s'annulant en l'infini. Elle tend donc vers $\frac{1-0+0}{1-0} = 1$. Le facteur de puissance restant, x , tend inéluctablement vers $+\infty$. Le produit final est donc sans équivoque :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

3. Pour valider cette nouvelle forme, la méthode la plus robuste est de réduire l'expression de droite au même dénominateur :

$$\begin{aligned} (x-1) + \frac{x+3}{x^2-1} &= \frac{(x-1)(x^2-1)}{x^2-1} + \frac{x+3}{x^2-1} \\ &= \frac{x(x^2-1) - 1(x^2-1) + x+3}{x^2-1} \\ &= \frac{x^3 - x - x^2 + 1 + x + 3}{x^2-1} \\ &= \frac{x^3 - x^2 + 4}{x^2-1} \end{aligned}$$

L'expression réduite est parfaitement identique à la définition de départ de $f(x)$. L'égalité est donc rigoureusement démontrée.

4. Établissons la différence $d(x)$ pour prouver l'asymptote oblique :

$$\begin{aligned} d(x) &= f(x) - (x-1) \\ &= \frac{x+3}{x^2-1} \quad (\text{grâce au résultat de la question 3}) \end{aligned}$$

Calculons la limite de cet écart en $+\infty$. C'est une fonction rationnelle, on applique la règle des monômes de plus haut degré en factorisant :

$$\begin{aligned}\frac{x+3}{x^2-1} &= \frac{x\left(1+\frac{3}{x}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} \\ &= \frac{1}{x} \times \frac{1+\frac{3}{x}}{1-\frac{1}{x^2}}\end{aligned}$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, et que la fraction complexe tend vers 1, la limite totale est 0. On a bien $\lim_{x \rightarrow +\infty} d(x) = 0$, ce qui est la définition exacte stipulant que la droite (Δ) d'équation $y = x - 1$ est une **asymptote oblique**.

5. La position relative requiert l'étude du signe de l'écart $d(x) = \frac{x+3}{x^2-1}$. L'intervalle de définition considéré est $I =]1; +\infty[$. Sur cet intervalle :

- $x > 1 \implies x + 3 > 4 > 0$. Le numérateur est strictement positif.
- $x > 1 \implies x^2 > 1 \implies x^2 - 1 > 0$. Le dénominateur est strictement positif.

Le quotient est donc globalement positif : $d(x) > 0$. L'écart étant irrémédiablement positif, on déduit que la courbe \mathcal{C}_f **évolue strictement au-dessus** de l'asymptote (Δ) sur l'intervalle étudié.

Partie B — Étude des variations

6. Appliquons les règles de dérivation de la forme $\frac{u}{v}$, avec : $u(x) = x^3 - x^2 + 4 \implies u'(x) = 3x^2 - 2x$
 $v(x) = x^2 - 1 \implies v'(x) = 2x$

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} \\ &= \frac{(3x^2 - 2x)(x^2 - 1) - (x^3 - x^2 + 4)(2x)}{(x^2 - 1)^2}\end{aligned}$$

On développe le numérateur avec prudence :

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^3 + 2x - (2x^4 - 2x^3 + 8x)}{(x^2 - 1)^2} \\ &= \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^3 + 2x - 2x^4 + 2x^3 - 8x}{(x^2 - 1)^2} \\ &= \frac{x^4 - 3x^2 - 6x}{(x^2 - 1)^2}\end{aligned}$$

La dernière étape consiste à factoriser ce résultat par l'élément commun x :

$$f'(x) = \frac{x(x^3 - 3x - 6)}{(x^2 - 1)^2}$$

La fonction s'écrit bien sous la forme demandée, en définissant formellement $g(x) = x^3 - 3x - 6$.

7. Sur l'intervalle $]1; +\infty[$, on connaît les signes des différents éléments :

- $x > 0$ (puisque $x > 1$)
- $(x^2 - 1)^2 > 0$ (le carré d'un réel non nul est strictement positif)
- $g(x) > 0$ (admise gracieusement par l'énoncé)

Le produit d'éléments strictement positifs engendre une dérivée indéniablement positive : $f'(x) > 0$ sur tout l'intervalle. La fonction f est ainsi **strictement croissante** sur $]1; +\infty[$. Le tableau de variations contient une seule immense flèche ascendante, prenant sa base à l'asymptote verticale $+\infty$ (limite trouvée à la question A.1) pour culminer à l'infini $+\infty$ (résultat de la question A.2).

Partie C — Les méandres de la suite

8. Trouver le point fixe $f(x) = x$ est bien plus facile en utilisant la version décomposée de la fonction issue de A.3 :

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff x - 1 + \frac{x+3}{x^2-1} = x \\ &\iff -1 + \frac{x+3}{x^2-1} = 0 \\ &\iff \frac{x+3}{x^2-1} = 1 \end{aligned}$$

Puisque $x \in]1; +\infty[$, le dénominateur $x^2 - 1$ n'est jamais nul. On peut multiplier la relation :

$$\begin{aligned} x + 3 &= x^2 - 1 \\ x^2 - x - 4 &= 0 \end{aligned}$$

Ce polynôme du second degré détiendra la réponse. Son discriminant est $\Delta = (-1)^2 - 4(1)(-4) = 1 + 16 = 17$. Il possède deux solutions :

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{17}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1 + \sqrt{17}}{2}$$

L'énoncé restreint drastiquement les valeurs valides à l'intervalle $]1; +\infty[$. Sachant que $\sqrt{17}$ est un peu plus grand que 4 (puisque $\sqrt{16} = 4$), la solution x_1 est négative (rejetée). La solution x_2 vaut environ $\frac{1+4,12}{2} = 2,56$, ce qui est bien supérieur à 1. Il existe donc une unique solution : $\alpha = \frac{1+\sqrt{17}}{2}$.

9. Nous devons démontrer par récurrence la propriété $P(n) : u_n \geq \alpha$.

- **Initialisation** : Pour $n = 0$, $u_0 = 3$. L'estimation de $\alpha \approx 2,56$ nous permet d'affirmer avec certitude que $3 \geq \alpha$. $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité** : On suppose $P(n)$ vraie pour un certain entier n , soit $u_n \geq \alpha$. La fonction f est strictement croissante sur $]1; +\infty[$ (prouvé en B.7). Elle conserve donc l'ordre des inégalités :

$$\begin{aligned} f(u_n) &\geq f(\alpha) \\ u_{n+1} &\geq \alpha \quad (\text{puisque } \alpha \text{ est le point fixe } f(\alpha) = \alpha) \end{aligned}$$

L'hérédité est validée. Par le principe de récurrence, pour tout n , $u_n \geq \alpha$.

Pour démontrer la décroissance, on étudie le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$, qui correspond à $f(u_n) - u_n$. L'étude de l'équation $f(x) - x = \frac{-x^2+x+4}{x^2-1}$ a montré que le numérateur est un trinôme. Ce trinôme s'annule en α , et il est négatif à l'extérieur des racines (car le coefficient devant x^2 est négatif). Puisque $u_n \geq \alpha$ et que α est la grande racine, la valeur de u_n se trouve dans la zone où le trinôme est négatif. Donc $f(u_n) - u_n \leq 0$, ce qui démontre irréfutablement que la suite (u_n) est **strictement décroissante**.

10. La convergence de la suite est aisée à établir : la suite est décroissante et est minorée par α (prouvé à l'instant). Le **théorème de convergence monotone** s'applique, la suite (u_n) converge vers une limite ℓ . Par ailleurs, comme la fonction f est une fraction rationnelle, elle est continue sur son domaine de définition. Le passage à la limite de la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ certifie que la limite ℓ doit vérifier la même relation de point fixe $\ell = f(\ell)$. La question 8 a péniblement démontré que cette équation ne possédait qu'une seule et unique solution dans cet intervalle. Par déduction immédiate, **la suite converge vers la limite** $\alpha = \frac{1+\sqrt{17}}{2}$. \square

Fin de la Fiche 6 — Limites de fonctions & Asymptotes

Tu maîtrises désormais l'analyse continue : les comportements limites aux bornes de l'infini, l'étude minutieuse des singularités locales (asymptotes verticales), l'art de lever toutes les formes indéterminées et d'exploiter la toute-puissance des croissances comparées de l'exponentielle.

Ces outils ouvrent directement la voie vers l'étude intégrale des fonctions et la continuité profonde des modèles.

→ Prochaine fiche : Composée de fonctions & dérivée.